Untersuchung der algebraischen Integrirbarkeit der linearen homogenen Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Hilfe von Differentialinvarianten.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG DER DOCTORWÜRDE

VON DER

PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

GENEHMIGT

UND

NEBST DEN BEIGEFÜGTEN THESEN

ÖFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

am 6. Februar 1893

VON

Max Meyer

aus Berlin.

OPPONENTEN:

Herr Cand. prob. HEINRICH STRASSMANN.
Herr Dr. phil. GEORG WALLENBERG.
Herr Dr. phil. LUDWIG SCHLESINGER, Privatdozent.

BERLIN.

BUCHDRUCKEREI M. NIETHE,

Kurstrasse 18. 19.

MEINER LIEBEN MUTTER

IN DANKBARKEIT

GEWIDMET

VOM VERFASSER.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535707_0161

Im ersten Bande der Acta Mathematica hat Herr Fuchs eine Klasse von linearen homogenen Differentialgleichungen dritter Ordnung untersucht, zwischen deren Fundamentalintegralen eine homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht; er fand, dass die Integrale algebraisch sind, wenn die Relation von höherem als dem zweiten Grade ist. — Diese Untersuchung hat Herr Ludwig Schlesinger in seiner Inauguraldissertation mit wesentlich gleicher Methode auf die Differentialgleichungen vierter Ordnung mit einer oder zwei homogenen Relationen zwischen den Fundamentalintegralen ausgedehnt und gefunden, dass im Falle der Existenz zweier Relationen, wenn nicht beide parabolische Relationen zweiten Grades sind, die Integrale algebraischen Charakter haben.

Einer wesentlich anderen Methode hat sich Herr Lipmann Schlesinger in seiner Dissertation bedient, um zu einem Theile der Resultate des Herrn Fuchs zu gelangen, nämlich der Anwendung gewisser Differentialinvarianten, welche bereits von den Herren Laguerre*) und Brioschi**) gebildet worden sind. Der Letztere hat auch, ebenso wie Halphen***), für die Differential-

*) Comptes rendus, t. 88, p. 116—119 und p. 224—227.

**) Bulletin de la société math. de France, t. VII, p. 106.

***) Acta Mathematica III, 4.

gleichungen vierter Ordnung einige Invarianten aufgestellt.

In der vorliegenden Arbeit wird für die Differentialgleichungen vierter Ordnung ebenfalls eine Anzahl von Invarianten gebildet (§ 1), welche zur Uebertragung der Methode des Herrn Lipm. Schlesinger auf die Differentialgleichungen vierter Ordnung benutzt werden (§ 2).

Einem besonderen Studium werden in § 3 diejenigen Differentialgleichungen unterzogen, für welche einige der aufgestellten Invarianten verschwinden, ohne dass dabei die Existenz von Relationen vorausgesetzt wird; es wird gezeigt, dass sie sich sämtlich in Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten transformiren lassen, und dadurch entschieden, in welchen Fällen hier eine oder zwei Relationen überhaupt möglich sind. — In § 4 endlich wird untersucht, wann in diesen Fällen die Integrale algebraisch sind. Es ergeben sich dabei im Wesentlichen die bereits von Herrn Ludwig Schlesinger gefundenen Resultate; nur in einem Falle — ausser demjenigen der beiden parabolischen Relationen zweiten Grades — reichen die über die Differentialgleichung gemachten Voraussetzungen nicht zu dem Schlusse der algebraischen Integrirbarkeit aus (cfr. pag. 40), wie noch an einem besonderen Beispiel gezeigt wird, wo die Integrale nicht algebraisch sind.

§ 1.

Es sei gegeben die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{A}) \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dz^4} + \mathfrak{p}_1 \frac{d^3 y}{dz^3} + \mathfrak{p}_2 \frac{d^2 y}{dz^2} + \mathfrak{p}_3 \frac{dy}{dz} + \mathfrak{p}_4 y = 0,$$

in welcher $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{p}_4$ algebraische Funktionen von z bedeuten. Dieselbe geht durch die Substitution

$$(1) \ldots\ldots y = e^{-\frac{1}{4}\int \mathfrak{p}_1 dz} \cdot u$$

über in

$$(\mathfrak{B}) \ldots\ldots \frac{d^4 u}{dz^4} + \mathfrak{a}(z) \frac{d^2 u}{dz^2} + \mathfrak{b}(z) \frac{du}{dz} + \mathfrak{c}(z) u = 0.$$

Hierin ist:

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{a} = -\frac{3}{2}\mathfrak{p}_1' - \frac{3}{8}\mathfrak{p}_1^2 + \mathfrak{p}_2 \\ \mathfrak{b} = -\mathfrak{p}_1'' + \frac{1}{8}\mathfrak{p}_1^3 - \frac{1}{2}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2 + \mathfrak{p}_3 \\ \mathfrak{c} = -\frac{1}{4}\mathfrak{p}_1''' + \frac{3}{16}\mathfrak{p}_1'^2 + \frac{3}{32}\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_1' \\ \quad -\frac{3}{256}\mathfrak{p}_1^4 - \frac{1}{4}\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_2 + \frac{1}{16}\mathfrak{p}_1^2\mathfrak{p}_2 \\ \qquad\qquad -\frac{1}{4}\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_3 + \mathfrak{p}_4. \end{cases}$$

Für alle Differentialgleichungen, die aus $(\mathfrak{A})$ durch die Substitution

$$y = \varrho(z)\, v$$

hervorgehen, haben die Ausdrücke $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ denselben Werth.

Ferner geht die Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ durch die Substitution

$$(3) \ldots\ldots z = \varphi(t)$$

über in

$$(\bar{A}) \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dt^4} + q_1(t)\frac{d^3 y}{dt^3} + q_2(t)\frac{d^2 y}{dt^2} + q_3(t)\frac{dy}{dt} + q_4(t)\, y = 0,$$

wo

$$(4) \ldots\ldots \begin{cases} q_1 = -6\frac{\varphi''}{\varphi'} + \mathfrak{p}_1 \varphi' \\ q_2 = -4\frac{\varphi'''}{\varphi'} 15\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 - 3\mathfrak{p}_1 \varphi'' + \mathfrak{p}_2 \varphi'^2 \\ q_3 = -\frac{\varphi^{(IV)}}{\varphi'} + 10\frac{\varphi''\varphi'''}{\varphi'^2} - 15\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^3 \\ \qquad - \mathfrak{p}_1 \varphi''' + 3\mathfrak{p}_1 \frac{\varphi''^2}{\varphi'} - \mathfrak{p}_2 \varphi' \varphi'' + \mathfrak{p}_3 \varphi'^3 \\ q_4 = \mathfrak{p}_4 \varphi'^4. \end{cases}$$

Um $(\bar{A})$ in diejenige Differentialgleichung zu transformiren, in welcher der Coefficient der dritten Ableitung verschwindet, muss man die Substitution

$$(5) \ldots\ldots y = e^{-\frac{1}{4}\int q_1 dt} \cdot v$$

machen und erhält

$$(B) \ldots\ldots \frac{d^4 v}{dt^4} + a(t)\frac{d^2 v}{dt^2} + b(t)\frac{dv}{dt} + c(t)\, v = 0.$$

Die Werthe der Coefficienten $a(t)$, $b(t)$ und $c(t)$ ergeben sich, indem man in den Gleichungen (2) die $\mathfrak{p}_i$ durch die q_i ersetzt und für diese ihre Werthe aus (4) einsetzt.

Sie lauten:

$$(6)\ldots\ldots\begin{cases} a(t) = \mathfrak{a}\,\varphi'^2 + 5\,\dfrac{\varphi'''}{\varphi'} - \dfrac{15}{2}\left(\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 \\ b(t) = \mathfrak{b}\,\varphi'^3 + 2\,\mathfrak{a}\,\varphi'\,\varphi'' + 5\,\dfrac{\varphi^{(IV)}}{\varphi'} - 20\,\dfrac{\varphi''\varphi'''}{\varphi'^2} \\ \qquad\qquad + 15\left(\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\right)^3 \\ c(t) = \mathfrak{c}\,\varphi'^4 + \dfrac{3}{2}\,\mathfrak{b}\,\varphi'^2\,\varphi'' \\ \qquad + \dfrac{3}{4}\,\mathfrak{a}\left(2\,\varphi'\,\varphi''' - \varphi''^2\right) + \dfrac{3}{2}\,\dfrac{\varphi^{(V)}}{\varphi'} \\ \qquad - \dfrac{15}{2}\,\dfrac{\varphi''\,\varphi^{(IV)}}{\varphi'^2} - \dfrac{15}{4}\left(\dfrac{\varphi'''}{\varphi'}\right)^2 + \dfrac{75}{4}\,\dfrac{\varphi''^2\,\varphi'''}{\varphi'^3} \\ \qquad\qquad - \dfrac{135}{16}\left(\dfrac{\varphi''}{\varphi'}\right)^4. \end{cases}$$

In den Coefficienten $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ ist hier z durch $\varphi(t)$ zu ersetzen. Die Grössen φ', φ''..... bedeuten die Ableitungen von $\varphi(t)$ nach t; ferner sollen im Folgenden die gestrichenen lateinischen Buchstaben die Ableitungen nach t, die gestrichenen deutschen Buchstaben die Ableitungen nach z resp. φ bedeuten.

Wir schreiten nunmehr zur Bildung der Invarianten, welche die Grundlage der folgenden Entwickelungen bilden. Setzt man zunächst

$$(7)\ldots\ldots b - a' = g$$

und ebenso

$$(8)\ldots\ldots \mathfrak{b} - \mathfrak{a}' = \mathfrak{g},$$

so folgt aus den Gleichungen (6)

$$(I)\ldots. g = \mathfrak{g}\cdot\varphi'^3.$$

Setzt man ferner

$$(9)\ldots. 9\,a^2 - 20\,a'' + 50\,b' - 100\,c = h$$

und

$$(10) \ldots . \; 9\,\mathfrak{a}^2 - 20\,\mathfrak{a}'' + 50\,\mathfrak{b}' - 100\,\mathfrak{c} = \mathfrak{h},$$

so folgt wieder aus den Gleichungen (6)

$$(\text{II}) \ldots . \; h = \mathfrak{h}\,\varphi'^4.$$

Da φ nicht constant, also φ' nicht 0 ist, so sind g und $\mathfrak{g}$ resp. h und $\mathfrak{h}$ gleichzeitig 0 oder von 0 verschieden. Es sei $\mathfrak{h}$, also auch h von 0 verschieden, so folgt durch logarithmische Differentiation der Gleichung

$$(\text{II}') \ldots . \; \varphi'^4 = \frac{h}{\mathfrak{h}}:$$

$$(11) \ldots . \; \frac{4\,\varphi''}{\varphi'} = \frac{h'}{h} - \frac{\mathfrak{h}'}{\mathfrak{h}}\,\varphi',$$

und durch Differentiation von (11) unter Berücksichtigung dieser Gleichung

$$(12) \ldots . \; \frac{4\,\varphi'''}{\varphi'} = \frac{h''}{h} - \frac{3}{4}\left(\frac{h'}{h}\right)^2 - \frac{3}{4}\,\frac{h'}{h}\cdot\frac{\mathfrak{h}'}{\mathfrak{h}}\,\varphi' + \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\mathfrak{h}'}{\mathfrak{h}}\right)^2 - \frac{\mathfrak{h}''}{\mathfrak{h}}\right]\varphi'^2.$$

Setzt man diese Werthe für $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ und $\frac{\varphi'''}{\varphi'}$ in den Ausdruck für α ein, so erhält man

$$(\text{III}) \ldots . \; l = \mathfrak{l}\,\varphi'^2,$$

wo

$$(13) \ldots . \; l = 45\left(\frac{h'}{h}\right)^2 - 40\,\frac{h''}{h} + 32\,\alpha$$

und entsprechend

$$(14) \ldots . \; \mathfrak{l} = 45\left(\frac{\mathfrak{h}'}{\mathfrak{h}}\right)^2 - 40\,\frac{\mathfrak{h}''}{\mathfrak{h}} + 32\,\mathfrak{a}$$

gesetzt ist.

Es sei ferner $\mathfrak{g}$, also auch g von 0 verschieden, so folgt durch logarithmische Differentiation von

$$(\text{I}') \ldots . \; \varphi'^3 = \frac{g}{\mathfrak{g}}:$$

$$(15) \ldots . \; 3\,\frac{\varphi''}{\varphi'} = \frac{g'}{g} - \frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}}\,\varphi',$$

und durch Differentiation dieser Gleichung unter Berücksichtigung derselben

$$(16) \ldots . 3\frac{\varphi'''}{\varphi'} = \frac{g''}{g} - \frac{2}{3}\left(\frac{g'}{g}\right)^2 - \frac{g'}{g}\cdot\frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}}\,\varphi' + \left[\frac{5}{3}\left(\frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}}\right)^2 - \frac{\mathfrak{g}''}{\mathfrak{g}}\right]\varphi'^2.$$

Setzt man wieder diese Werthe für $\frac{\varphi''}{\varphi'}$ und $\frac{\varphi'''}{\varphi'}$ in den Ausdruck für α ein, so erhält man

$$(IV) \ldots . m = \mathfrak{m}\varphi'^2,$$

wo

$$(17) \ldots . m = 35\left(\frac{g'}{g}\right)^2 - 30\frac{g''}{g} + 18\alpha$$

und entsprechend

$$(18) \ldots . \mathfrak{m} = 35\left(\frac{\mathfrak{g}'}{\mathfrak{g}}\right)^2 - 30\frac{\mathfrak{g}''}{\mathfrak{g}} + 18\mathfrak{a}$$

gesetzt ist. Es folgt wieder wie vorher, dass l und $\mathfrak{l}$ resp. m und $\mathfrak{m}$ gleichzeitig 0 oder von 0 verschieden sind.

Aus (I), (II), (III) und (IV) ergeben sich nun folgende Gleichungen:

$$(\alpha) \ldots . \frac{g^4}{h^3} = \frac{\mathfrak{g}^4}{\mathfrak{h}^3}$$

$$(\beta) \ldots . \frac{g^2}{m^3} = \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{m}^3}$$

$$(\gamma) \ldots . \frac{l^2}{h} = \frac{\mathfrak{l}^2}{\mathfrak{h}}.$$

Die Ausdrücke (I), (II), (III) und (IV) sind also relative, die Ausdrücke (α), (β) und (γ) absolute Invarianten. Durch logarithmische Differentiation der Gleichungen (α), (β) und (γ) nach t erhält man drei neue Invarianten, die zum Exponenten 1 gehören*):

*) cfr. Lipm. Schlesinger, Inauguraldissert., p. 10 und 11.

$$(V) \ldots . k = \mathfrak{f} \cdot \varphi'$$
$$(VI) \ldots . r = \mathfrak{r} \cdot \varphi'$$
$$(VII) \ldots . s = \mathfrak{j} \cdot \varphi',$$

wo

$$k = 4\frac{g'}{g} - 3\frac{h'}{h}$$
$$r = 2\frac{g'}{g} - 3\frac{m'}{m}$$
$$s = 2\frac{l'}{l} - \frac{h'}{h}$$

gesetzt ist und entsprechend $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{j}$ in deutschen Buchstaben. Auch die Ausdrücke k, r, s und resp. $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{j}$ sind gleichzeitig 0 oder von 0 verschieden. Aus (α), (β) und (γ) folgert man:

Wenn eine Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ mit algebraischen Coefficienten, für welche nicht gleichzeitig die Invarianten $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{j}$ verschwinden oder ihren Sinn verlieren — dadurch, dass $\mathfrak{g}$ oder $\mathfrak{h}$ oder $\mathfrak{l}$ oder $\mathfrak{m}$ verschwindet — durch die Substitution

$$z = \varphi(t)$$
$$y = u\,\varrho(t)$$

in eine Differentialgleichung (A)

$$(A) \ldots . \frac{d^4 u}{dt^4} + p_1 \frac{d^3 u}{dt^3} + p_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + p_3 \frac{du}{dt} + p_4 u = 0$$

mit ebenfalls algebraischen Coefficienten übergeht, so ist die Transformationsfunktion $\varphi(t)$ eine algebraische Funktion von t.

Die Grösse $\varrho(t)$ hat den Werth

$$\varrho(t) = e^{-\frac{1}{4}\int \left(p_1 \varphi' - 6\frac{\varphi''}{\varphi'} - p_1\right) dt}$$
$$= \varphi'^{\frac{3}{2}}\, e^{-\frac{1}{4}\int p_1 \varphi' dt}\, e^{\frac{1}{4}\int p_1 dt}.$$

Daraus ergiebt sich der Satz:

Sind die Integrale einer Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten

$$(\mathfrak{A}) \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dz^4} + \mathfrak{p}_1(z)\frac{d^3 y}{dz^3} + \mathfrak{p}_2(z)\frac{d^2 y}{dz^2} + \mathfrak{p}_3(z)\frac{dy}{dz} + \mathfrak{p}_4(z)\, y = 0,$$

für welche nicht gleichzeitig die Invarianten $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{f}$ identisch verschwinden oder ihren Sinn verlieren, sämtlich algebraisch, und geht sie durch die Substitution

$$z = \varphi(t)$$
$$y = u \cdot \varrho(t)$$

in eine Differentialgleichung (A) mit algebraischen Coefficienten über, so unterscheiden sich alle Integrale der letzteren von algebraischen Functionen nur durch einen gemeinsamen Factor, dessen logarithmische Ableitung selber eine algebraische Function von t ist.

Den Factor $\varrho(t)$ kann man in der Form schreiben:

$$\varrho(t) = \varphi'^{\frac{3}{2}} \left(e^{-\frac{1}{4}\int \mathfrak{p}_1 dz} \right)_{z=\varphi(t)} e^{\frac{1}{4}\int p_1 dt}.$$

Nun ist φ' eine algebraische Funktion von t; ferner ist, wenn Δ die Fundamentaldeterminante eines Systems von Integralen der Differentialgleichung $(\mathfrak{A})$ bedeutet:

$$\mathfrak{p}_1 = -\frac{\Delta'}{\Delta},$$

also:

$$e^{-\frac{1}{4}\int \mathfrak{p}_1 dz} = \Delta^{\frac{1}{4}}.$$

Da Δ eine algebraische Funktion von z, also auch von t ist, so lautet der Bestandtheil von $\varrho(t)$, welcher nicht algebraisch zu sein braucht: $e^{\frac{1}{4}\int p_1 dt}$. Ist also noch ρ_1 die logarithmische Ableitung einer algebraischen Funktion, so ist $\varrho(t)$ selber algebraisch. In diesem

Falle sind also auch die Integrale der Differentialgleichung (A) algebraische Functionen von t.

§ 2.

I) Bestehen zwischen vier monogenen analytischen Funktionen y_1, y_2, y_3, y_4 einer Variablen z zwei homogene Relationen m^{ten} resp. n^{ten} Grades mit konstanten Coefficienten:

$$(1) \ldots \begin{cases} \varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 \\ \varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0, \end{cases}$$

welche ein irreduktibles Gebilde 2^{ter} Stufe in der dreifachen Mannigfaltigkeit $\left(\frac{y_1}{y_4}, \frac{y_2}{y_4}, \frac{y_3}{y_4}\right)$ constituiren, so sind, wenn man

$$\frac{y_1}{y_4} = \mathfrak{y}_1, \ \frac{y_2}{y_4} = \mathfrak{y}_2, \ \frac{y_3}{y_4} = \mathfrak{y}_3$$

und

$$\varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_4^m \cdot F_1(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3)$$
$$\varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_4^n \cdot F_2(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3)$$

setzt, die Grössen $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{y}_3$ durch die irreduktiblen Gleichungen

$$(2) \ldots \ldots \begin{cases} F_1(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3) = 0 \\ F_2(\mathfrak{y}_1, \mathfrak{y}_2, \mathfrak{y}_3) = 0 \end{cases}$$

als algebraische Funktionen von y_1 bestimmt:

$$(3) \ldots \ldots \begin{cases} \mathfrak{y}_2 = f_1(\mathfrak{y}_1) \\ \mathfrak{y}_3 = f_2(\mathfrak{y}_1). \end{cases}$$

Es möge nun noch ein zweites System von vier Funktionen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 von z' dieselben beiden Relationen (1) befriedigen, sodass bei analoger Bezeichnung

$$(2') \ldots \ldots \begin{cases} F_1(\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3) = 0 \\ F_2(\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3) = 0 \end{cases}$$

und

$$(3') \ldots\ldots \begin{cases} \mathfrak{Y}_2 = f_1(\mathfrak{Y}_1) \\ \mathfrak{Y}_3 = f_2(\mathfrak{Y}_1) \end{cases}$$

wird. Es sei ferner

$$(4) \ldots\ldots \quad \mathfrak{y}_1 = g_1(z), \quad \mathfrak{y}_2 = g_2(z), \quad \mathfrak{y}_3 = g_3(z)$$
$$(4') \ldots\ldots \mathfrak{Y}_1 = G_1(z'), \ \mathfrak{Y}_2 = G_2(z'), \ \mathfrak{Y}_3 = G_3(z').$$

Wir setzen nun die unabhängigen Variablen z und z' in Abhängigkeit von einander durch die Gleichung

$$g_1(z) = G_1(z'),$$

aus welcher sich

$$(5) \ldots\ldots z = \psi(z')$$

ergeben mag, sodass also identisch

$$(6) \ldots\ldots g_1[\psi(z')] = G_1(z')$$

ist und demnach $\mathfrak{y}_1$ durch die Substitution (5) in $\mathfrak{Y}_1$ übergeht. Dann gehen gleichzeitig $\mathfrak{y}_2$ und $\mathfrak{y}_3$ in $\mathfrak{Y}_2$ und $\mathfrak{Y}_3$ über. Denn nach (3), (4) und (6) ist einerseits

$$\mathfrak{y}_2 = f_1[g_1(z)] = f_1[G_1(z')]$$
$$\mathfrak{y}_3 = f_2[g_1(z)] = f_2[G_1(z')]$$

und andererseits nach (3') und (4')

$$\mathfrak{Y}_2 = f_1[G_1(z')] \ *)$$
$$\mathfrak{Y}_3 = f_2[G_1(z')].$$

Die vier Funktionen y_1, y_2, y_3, y_4 unterscheiden sich daher, wenn man sie durch die Substitution (5) transformirt, als Funktionen von z' aufgefasst, von den vier Funktionen Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 nur durch den allen gemeinsamen Faktor $\frac{y_4}{Y_4}$.

Betrachtet man nun die Funktionen y_1, y_2, y_3, y_4 und Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 als Fundamentalintegrale zweier Differentialgleichungen $(\mathfrak{A})$ und (A), indem man an Stelle von Y, z', ψ resp. u, t, φ setzt, so kann man den Satz aussprechen:

*) cfr. Lipm. Schlesinger, Diss., p. 18.

Wenn zwischen den Fundamentalintegralen zweier Differentialgleichungen vierter Ordnung dieselben beiden von einander unabhängigen irreduktiblen homogenen Relationen bestehen, so lassen sich diese beiden Differentialgleichungen durch eine Substitution

$$z = \varphi(t)$$
$$y = \varrho(t)\, u$$

aus einander ableiten.

II) Es möge zwischen den Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 das irreduktible System homogener Relationen bestehen;

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} \varphi_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0 \\ \varphi_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = 0. \end{cases}$$

Setzt man für y_1 und y_2 beliebige algebraische Funktionen einer Variablen z, deren Quotient nicht constant ist:

$$y_1 = g_1(z),\ y_2 = g_2(z),$$

so sind durch die beiden Relationen (1) auch y_3 und y_4 als algebraische Funktionen von z bestimmt:

$$y_3 = g_3(z),\ y_4 = g_4(z),$$

und es besteht zwischen den $g_i(z)$ keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten, weil sich sonst die Verhältnisse je zweier $g_i(z)$ also constant ergeben würden *), während doch der Quotient von $g_1(z)$ und $g_2(z)$ als nicht constant vorausgesetzt war.

Die Funktionen $y_i = g_i(z)$ können aufgefasst werden als Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung mit algebraischen Coefficienten. Macht man

*) Dabei wird vorausgesetzt, dass nicht eine homogene lineare Relation zwischen den y_i die Folge der beiden Relationen (1) ist.

nun die Annahme, dass für die Differentialgleichung (A) die Invarianten k, r und s nicht gleichzeitig verschwinden oder ihren Sinn verlieren, so folgt aus den Entwickelungen in § 1 und in Theil I des § 2 der Satz:

Wenn zwischen den Integralen einer Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten

$$(A) \ldots \frac{d^4u}{dt^4} + p_1 \frac{d^3u}{dt^3} + p_2 \frac{d^2u}{dt^2} + p_3 \frac{du}{dt} + p_4 u = 0,$$

für welche nicht gleichzeitig die Invarianten k, r und s verschwinden oder ihren Sinn verlieren, die beiden Relationen (1) bestehen, so unterscheiden sich die Integrale derselben von algebraischen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen t nur durch einen allen gemeinsamen Faktor, dessen logarithmische Ableitung ebenfalls eine algebraische Funktion von t ist. Ist p_1 selber die logarithmische Ableitung einer algebraischen Funktion, so sind die Integrale der Differentialgleichung (A) algebraische Funktionen von t.

§ 3.

Wir kommen nun zu der Erörterung der Fälle, in denen die Invarianten k, r und s verschwinden oder ihren Sinn verlieren; es sind die folgenden:

I) $g = 0,\ h = 0$

II) $g \neq 0,\ h \neq 0$

1) $l = 0$

2) $l \neq 0,\ s = 0$

III) $g \neq 0,\ h = 0$

1) $m = 0$

2) $m \neq 0,\ r = 0$

IV) $g \neq 0,\ h \neq 0,\ k = 0$

1) $l = 0,\ m = 0$

2) $l \neq 0,\ m \neq 0,\ r = 0,\ s = 0.$

I) $g = 0,\ h = 0.$

Wenn für eine Differentialgleichung, zwischen deren Integralen die Relationen (1) des § 2 bestehen, die Invarianten g und h verschwinden, so findet dies nach Früherem für alle Differentialgleichungen mit diesen Relationen statt. Die Differentialgleichung

$$(\mathfrak{B}_1) \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dx^4} = 0$$

besitzt die Integrale $1, x, x^2, x^3$; diese bilden ein Fundamentalsystem und befriedigen die Relationen

$$(1) \ldots\ldots \begin{cases} y_2^2 = y_1 y_3 \\ y_3^2 = y_2 y_4. \end{cases}$$

Die Fundamentalintegrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ genügen also zwei parabolischen Relationen zweiten Grades, und da für $(\mathfrak{B}_1)$ identisch $g = 0$ und $h = 0$ ist, so sind für jede Differentialgleichung mit den Relationen (1) die Invarianten g und h gleich 0.

Umgekehrt gehören auch zu jeder Differentialgleichung

$$(B) \ldots \frac{d^4 v}{dt^4} + a \frac{d^3 v}{dt^3} + b \frac{dv}{dt} + cv = 0,$$

für welche g und h identisch verschwinden, zwei parabolische Relationen zweiten Grades: transformirt man nämlich dieselbe durch die inverse Funktion $x = \psi(t)$ der Funktion $z = \varphi(t)$, welche aus der Differentialgleichung

$$(2) \ldots\ldots 5 \frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{15}{2} \left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = a$$

bestimmt wird, so folgt aus der ersten der Gleichungen (6) des § 1, dass in der transformirten Differentialgleichung $a = 0$ ist. Dann folgt aus $g = 0$, dass $b = 0$, und dann aus $h = 0$, dass auch $c = 0$ ist. Die Differentialgleichung (B) geht also durch diese Transformation in die Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_1)$ über, d. h.

ihre Integrale genügen den beiden parabolischen Relationen zweiten Grades (1).

II) $g = 0,\ h \neq 0.$

1) $l = 0.$

Wir transformiren die Differentialgleichung

$$(B) \ldots . \frac{d^4 v}{dt^4} + a \frac{d^2 v}{dt^2} + b \frac{dv}{dt} + cv = 0$$

gemäss der Gleichung $z = \varphi(t)$ auf die unabhängige Veränderliche z, wo $\varphi(t)$ bestimmt wird durch die Gleichung

$$(1) \ldots . h = \mathfrak{h} \cdot \varphi'^4,$$

in welcher $\mathfrak{h}$ eine beliebig, aber von 0 verschieden gewählte Constante $100\varkappa$ ist. Dann folgt aus $l = 0$, dass in der transformirten Differentialgleichung $\mathfrak{a} = 0$ ist; ferner ergiebt sich aus $\mathfrak{g} = 0$, dass $\mathfrak{b} = 0$, und endlich aus $\mathfrak{h} = 100\varkappa$, dass $\mathfrak{c} = -\varkappa$ ist. Die transformirte Differentialgleichung lautet also:

$$(\mathfrak{B}_2) \ldots . \frac{d^4 y}{dz^4} - \varkappa y = 0.$$

Ihre Integrale sind

$$y_1 = e^{\sqrt[4]{\varkappa}\, z} = e^{r_1 z},\ y_2 = e^{-\sqrt[4]{\varkappa}\, z} = e^{r_2 z}$$

$$y_3 = e^{i\sqrt[4]{\varkappa}\, z} = e^{r_3 z},\ y_4 = e^{-i\sqrt[4]{\varkappa}\, z} = e^{r_4 z}.$$

Zwischen diesen besteht die quadratische Relation

$$(2) \ldots . y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0.$$

Soll zwischen y_1, y_2, y_3 und y_4 noch eine zweite homogene Relation

$$(3) \ldots . L = \sum_{(i+k+l+m=n)} a_{i_{k_{l_m}}} y_1^{\,i} y_2^{\,k} y_3^{\,l} y_4^{\,m} = 0$$

bestehen, so müssen sich alle in L vorkommenden

Glieder $y_1^{i}\, y_2^{k}\, y_3^{l}\, y_4^{m}$ zu demselben Gliede $e^{\alpha z}$ vereinigen; es muss also

$$ir_1 + kr_2 + lr_3 + mr_4$$

für alle in L vorkommenden Systeme $(i,\ k,\ l,\ m)$ denselben Werth haben und gleichzeitig

$$\Sigma c_{i_{k_{l_m}}} = 0$$

sein. Sind $(i_1,\ k_1,\ l_1,\ m_1)$ und $(i_2,\ k_2,\ l_2,\ m_2)$ zwei verschiedene solcher Systeme, so muss

$$(4) \ldots\ldots d_1 r_1 + d_2 r_2 + d_3 r_3 + d_4 r_4 = 0$$

sein, wenn

$$d_1 = i_2 - i_1,\ d_2 = k_2 - k_1,\ d_3 = l_2 - l_1,\ d_4 = m_2 - m_1$$

gesetzt wird. Ausserdem ist

$$(5) \ldots\ldots r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$$

und

$$(6) \ldots\ldots d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0.$$

Nun ist in diesem speciellen Falle

$$r_1 = \sqrt{\alpha},\ r_2 = -\sqrt{\alpha},\ r_3 = i\sqrt{\alpha},\ r_4 = -i\sqrt{\alpha}.$$

Die Gleichung (4) lautet demnach hier, da α von 0 verschieden,

$$(d_1 - d_2) + i\,(d_3 - d_4) = 0$$

und ergiebt

$$d_1 = d_2,\ d_3 = d_4.$$

Dann folgt aber aus (6)

$$d_3 = -d_1,$$

und die Relation (3) lautet nach Division durch $y_1^{n_1}\, y_2^{n_2}\, y_3^{n_3}\, y_4^{n_4}$

$$\Sigma C\, y_1^{d_1}\, y_2^{d_2}\, y_3^{d_3}\, y_4^{d_4} = 0$$

oder mit Berücksichtigung der Werthe von d_2, d_3 und d_4

$$\Sigma C\, y_1^{d_1}\, y_2^{d_1}\, y_3^{-d_1}\, y_4^{-d_1} = 0:$$

dieselbe nimmt also, wenn

$$\frac{y_1 y_2}{y_3 y_4} = u$$

gesetzt wird, die Gestalt an

$$f(u) = 0,$$

wo $f(u)$ eine ganze rationale Funktion von u bedeutet. Da aber andererseits in Folge von (2)

$$u = 1$$

ist, so muss $f(u)$ durch $u - 1$, also L durch $y_1 y_2 - y_3 y_4$ theilbar sein; d. h. es existirt in diesem Falle nur die eine irreduktible Relation (2).

2) $l \neq 0,\ s = 0.$

Da $s = 0$ ist, so muss

$$(1) \ldots\ldots \frac{l^2}{h} = \varkappa$$

sein, wo $\varkappa$ eine von 0 verschiedene Constante bedeutet. Wir transformiren die Differentialgleichung (B) gemäss der Gleichung $z = \varphi(t)$ auf die unabhängige Veränderliche z, in welcher $\varphi(t)$ bestimmt wird durch

$$l = \mathfrak{l}\,\varphi'^2,$$

wo $\mathfrak{l}$ eine beliebig, aber von 0 verschieden gewählte Constante bedeutet; so muss wegen (1) auch $\mathfrak{h}$ eine Constante sein. Dann folgt aus § 1, (14), dass auch $\mathfrak{a}$ constant ist; ferner ergiebt sich aus $g = 0$, dass $\mathfrak{b} = 0$ ist; endlich aus § 1, (10), dass $\mathfrak{c}$ constant ist. Und zwar wird

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{32}\mathfrak{l},$$

$$\mathfrak{h} = \frac{\mathfrak{l}^2}{\varkappa}$$

und

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{100}\left(\frac{9}{32^2}\mathfrak{l}^2 - \frac{\mathfrak{l}^2}{\varkappa}\right);$$

also, wenn man der Einfachheit wegen

$$\mathfrak{l} = 32\varkappa$$

wählt:

$$\mathfrak{a} = \varkappa$$

$$\mathfrak{c} = \frac{1}{100}(9\varkappa^2 - 32^2\varkappa).$$

Die transformirte Differentialgleichung lautet also

$$(\mathfrak{B}_3) \ldots\ldots \frac{d^4y}{dz^4} + \varkappa\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1}{100}(9\varkappa^2 - 32^2\varkappa)\,y = 0.$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind $\pm\sqrt{\varrho_1}$ und $\pm\sqrt{\varrho_2}$, wo ϱ_1 und ϱ_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(2) \ldots\ldots \varrho^2 + \varkappa\varrho + \frac{1}{100}(9\varkappa^2 - 32^2\varkappa) = 0$$

sind. Sind die Wurzeln dieser Gleichung von einander und von 0 verschieden, so lauten die Integrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_3)$:

$$y_1 = e^{+\sqrt{\varrho_1}\,z} = e^{r_1 z},\quad y_2 = e^{-\sqrt{\varrho_1}\,z} = e^{r_2 z}$$

$$y_3 = e^{+\sqrt{\varrho_2}\,z} = e^{r_3 z},\quad y_4 = e^{-\sqrt{\varrho_2}\,z} = e^{r_4 z}.$$

Zwischen diesen besteht jedenfalls die eine Relation

$$(3) \ldots\ldots y_1\,y_2 - y_3\,y_4 = 0.$$

Soll eine zweite Relation bestehen;

$$L = \Sigma c_{i_{k_{l_m}}}\, y_1^{\,i}\, y_2^{\,k}\, y_3^{\,l}\, y_4^{\,m} = 0,$$

so müssen bei derselben Bedeutung der Grössen d_1, d_2, d_3, d_4 wie auf Seite 16 die Gleichungen stattfinden

$$(4) \ldots \begin{cases} d_1 r_1 + d_2 r_2 + d_3 r_3 + d_4 r_4 = 0 \\ r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0 \\ d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0, \end{cases}$$

oder, da hier

$$r_2 = -r_1$$

und

$$r_4 = -r_3$$

ist:

$$r_1 (d_1 - d_2) + r_3 (d_3 - d_4) = 0.$$

Es muss also

$$\frac{r_1}{r_3} = \frac{d_4 - d_3}{d_1 - d_2},$$

d. h. eine rationale Zahl sein, wenn nicht

$$d_2 = d_1$$

und

$$d_4 = d_3$$

ist. In diesem letzteren Falle folgt aber wie in II, 1), dass nur die eine irreduktible Relation (3) existirt.

Wenn $\frac{r_1}{r_3}$ eine rationale Zahl ist *), so können wir setzen

$$r_1 = \gamma \mu$$
$$r_3 = \gamma \nu,$$

wo μ und ν ganze Zahlen ohne gemeinsamen Theiler bedeuten. Man kann dann die vier Grössen y_i als rationale Funktionen des Parameters $\zeta = e^{\gamma z}$ darstellen:

$$y_1 = \zeta^{\mu}, \; y_2 = \zeta^{-\mu}, \; y_3 = \zeta^{\nu}, \; y_4 = \zeta^{-\nu}.$$

Da

$$\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^{\nu} = \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^{\mu} = \zeta^{2\mu\nu}$$

ist, so erhält man als zweite Relation

$$y_1^{\nu} y_4^{\mu} - y_2^{\nu} y_3^{\mu} = 0,$$

*) Dies ist der Fall, wenn das Verhältnis der beiden Wurzeln ϱ_1 und ϱ_2 der Gleichung (2) das Quadrat einer rationalen Zahl ist:

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_2} = \frac{r_1^2}{r_3^2} = \frac{\mu^2}{\nu^2}.$$

Es ergiebt sich, dass dies stattfindet für

$$\varkappa = \frac{32^2 (\mu^2 + \nu^2)^2}{(9\mu^2 - \nu^2)(\mu^2 - 9\nu^2)}.$$

welche, wie leicht einzusehen, irreduktibel und von (3) unabhängig ist.

Die Gleichung (2) hat gleiche Wurzeln, wenn $\varkappa = -64$ ist. In diesem Falle lauten die Integrale der Differentialgleichung ($\mathfrak{B}_3$)

$$(5) \ldots . y_1 = e^{r_1 z},\ y_2 = e^{-r_1 z},\ y_3 = z e^{r_1 z},\ y_4 = z e^{-r_1 z}.$$

Zwischen diesen besteht die Relation

$$(6) \ldots . y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0.$$

Eine zweite Relation besteht in diesem Falle nicht. Denn es sei

$$(7) \ldots . L = \Sigma c_{i_{k_{l_m}}} y_1^{\,i} y_2^{\,k} y_3^{\,l} y_4^{\,m} = 0 \ (i+k+l+m=n)$$

eine von (6) unabhängige Relation; setzt man für y_1, y_2, y_3, y_4 ihre Werthe aus (5) ein, so kann, wie man leicht einsieht, die Relation (7) nur dann bestehen, wenn sämtliche Glieder von L sich zu einem einzigen Gliede $z^s . e^{\alpha z}$ vereinigen, dessen Coefficient dann 0 wird, da sonst L in mehrere Einzelrelationen zerfallen würde*). Hieraus geht hervor, dass L in Bezug auf y_3 und y_4 homogen sein muss, und zwar von der Dimension s; folglich muss L als homogene Funktion n^{ten} Grades der vier Grössen y_1, y_2, y_3, y_4 auch homogen in y_1 und y_2 sein, und zwar von der Dimension $n - s$. Dividirt man daher die Relation $L = 0$ durch $y_2^{\,n-s} y_4^{\,s}$, so erhält man eine Relation zwischen $u = \frac{y_1}{y_2}$ und $v = \frac{y_3}{y_4}$

$$F(u, v) = 0.$$

*) Sollte eine dieser Einzelrelationen gerade bis auf einen Faktor eine Potenz der Relation (6) sein, so könnte der dementsprechende Theil schon in L einfach fortgelassen werden. Mehr als zwei homogene Relationen aber dürfen nicht existiren.

Zwischen u und v besteht aber in Folge von (6) die Gleichung

$$u - v = 0;$$

folglich muss $F(u, v)$ durch $u - v$, also L durch $y_1 y_4 - y_2 y_3$ theilbar sein, da sich sonst u und v als constant ergeben würden. Es existirt also im Falle gleicher Wurzeln in der That nur die eine Relation (6).

Der Coefficient von y in der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_3)$ wird 0, wenn $\varkappa$ den Werth $\frac{32^2}{9}$ hat. Die charakteristische Gleichung lautet in diesem Falle:

$$r^4 + \varkappa r^2 = 0;$$

ihre Wurzeln sind

$$r_2 = r_4 = 0,$$

$$r_1 = +\sqrt{-\varkappa} = \varrho,\ r_3 = -\sqrt{-\varkappa} = -\varrho$$

$$\left(\varrho = \frac{32}{3}\sqrt{-1}\right).$$

Die Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_3)$ hat also hier die Integrale

$$y_1 = e^{\varrho z},\ y_2 = 1,\ y_3 = e^{-\varrho z},\ y_4 = z.$$

Zwischen y_1, y_2 und y_3 besteht die Relation

$$y_2^2 - y_1 y_3 = 0.$$

Es leuchtet ein, dass in diesem Falle eine zweite Relation nicht möglich ist.

III) $g \neq 0,\ h = 0.$

1) $m = 0.$

Wir transformiren die Differentialgleichung (B) gemäss der Gleichung $z = \varphi(t)$ auf die unabhängige Veränderliche z, in welcher $\varphi(t)$ bestimmt wird durch

$$g = \mathfrak{g}\,\varphi'^3,$$

wo $\mathfrak{g}$ eine beliebige von 0 verschiedene Constante be-

deutet. Dann folgt aus § 1, (18), da $m = 0$ ist, dass auch $\mathfrak{a} = 0$ sein muss, ferner aus § 1, (8):

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g};$$

endlich aus § 1, (10), da $\mathfrak{h} = 0$ ist:

$$\mathfrak{c} = 0.$$

Die transformirte Differentialgleichung lautet also:

$$(\mathfrak{B}_4') \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dz^4} + \mathfrak{g} \frac{dy}{dz} = 0,$$

oder, wenn wir der Einfachheit wegen $\mathfrak{g} = -1$ wählen:

$$(\mathfrak{B}_4) \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dz^4} - \frac{dy}{dz} = 0.$$

Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind $0, 1, \varrho, \varrho^2$, wo ϱ eine primitive dritte Einheitswurzel bedeutet. Die Integrale der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_4)$ lauten also:

$$y_1 = 1, \; y_2 = e^{z}, \; y_3 = e^{\varrho z}, \; y_4 = e^{\varrho^2 z}.$$

Zwischen diesen besteht die homogene Relation dritten Grades

$$(1) \ldots\ldots y_1^3 - y_2 y_3 y_4 = 0,$$

und zwar ist dies die einzige Relation, welche zwischen den Integralen dieser Differentialgleichung möglich ist. Denn die Gleichungen (4), (5), (6) pag. 16 werden, da hier

$$r_1 = 0, \; r_2 = 1, \; r_3 = \varrho, \; r_4 = \varrho^2$$

ist:

$$1 + \varrho + \varrho^2 = 0$$
$$d_2 + d_3 \varrho + d_4 \varrho^2 = 0$$
$$d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 0.$$

Aus der Irreduktibilität der ersten dieser Gleichungen ergiebt sich:

$$d_2 = d_3 = d_4 = d,$$

also aus der dritten:

$$d_1 = -3d.$$

Eine zweite Relation

$$L = \Sigma c_{i_{k_{l_m}}} y_1^{\,i} y_2^{\,k} y_3^{\,l} y_4^{\,m} = 0 \quad (i + k + l + m = n)$$

würde daher nach Division durch $y_1^{\,i_1} y_2^{\,k_1} y_3^{\,l_1} y_4^{\,m_1}$ die Gestalt annehmen:

$$\Sigma c_{i_{k_{l_m}}} y_1^{\,-3d} y_2^{\,d} y_3^{\,d} y_4^{\,d} = 0$$

oder

$$f(u) = 0,$$

wenn

$$y_1^{\,-3} y_2 y_3 y_4 = u$$

gesetzt wird und f eine ganze rationale Funktion bedeutet. Da aber in Folge von (1) andererseits

$$u = 1$$

ist, so muss $f(u)$ durch $u - 1$, also L durch $y_1^3 - y_2 y_3 y_4$ theilbar sein; d. h. es existirt in diesem Falle nur die eine irreduktible Relation (1).

2) $m \neq 0$, $r = 0$.

Da $r = 0$ ist, so muss

$$(2) \ldots\ldots \frac{g^2}{m^3} = \varkappa$$

sein, wo $\varkappa$ eine von 0 verschiedene Constante bedeutet. Wir transformiren die Differentialgleichung (B) gemäss der Gleichung

$$z = \varphi(t)$$

auf die unabhängige Veränderliche z, in welcher $\varphi(t)$ bestimmt wird durch

$$m = \mathfrak{m} \cdot \varphi'^2,$$

wo $\mathfrak{m}$ eine beliebig, aber von 0 verschieden gewählte Constante ist. Zunächst folgt aus (2), dass auch $\mathfrak{g}$ eine Constante ist:

$$\mathfrak{g} = \sqrt{\varkappa \cdot \mathfrak{m}^3}.$$

Ferner folgt aus § 1, (18):

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{18}\mathfrak{m};$$

sodann aus § 1, (8):

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g} = \sqrt{\varkappa \mathfrak{m}^3};$$

endlich, da $\mathfrak{h} = 0$ ist, aus § 1, (10):

$$\mathfrak{c} = \frac{9}{100}\mathfrak{a}^2 = \frac{1}{3600}\mathfrak{m}^2.$$

Die transformirte Differentialgleichung lautet also, wenn noch der Einfachheit wegen $\mathfrak{m} = \varkappa$ gewählt wird:

$$(\mathfrak{B}_5) \ldots \frac{d^4 y}{d z^4} + \frac{1}{18}\varkappa \frac{d^2 y}{d z^2} + \varkappa^2 \frac{d y}{d z} + \frac{1}{3600}\varkappa^2 y = 0.$$

Die Behandlung der in diesem Falle auftretenden Relationen werden wir später im Zusammenhang mit dem allgemeinen Fall erledigen.

IV) $g \neq 0,\ h \neq 0,\ k = 0.$

1) $l = 0,\ m = 0$ *).

Da $k = 0$ ist, so muss

$$(1) \ldots \frac{g^4}{h^3} = \varkappa$$

sein, wo $\varkappa$ eine von 0 verschiedene Constante bedeutet. Wir transformiren die Differentialgleichung (B) auf die unabhängige Veränderliche z gemäss der Gleichung $z = \varphi(t)$, in welcher $\varphi(t)$ bestimmt wird durch die Gleichung

$$g = \mathfrak{g}\,\varphi'^3,$$

wo $\mathfrak{g}$ eine beliebig, aber von 0 verschieden gewählte Constante ist. Zunächst folgt aus (1), dass auch $\mathfrak{h}$ eine Constante sein muss:

*) Unter der Voraussetzung $k = 0$ sind l und m gleichzeitig 0 oder von 0 verschieden.

$$\mathfrak{h} = \sqrt[3]{\mathfrak{g}^4 \cdot \varkappa^{-1}}.$$

Ferner folgt aus § 1, (14) oder (18):

$$\mathfrak{a} = 0;$$

sodann aus § 1, (8):

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g};$$

endlich aus § 1, (10):

$$\mathfrak{c} = -\frac{1}{100}\mathfrak{h} = -\frac{1}{100}\sqrt[3]{\mathfrak{g}^4 \varkappa^{-1}}.$$

Wählt man noch $\mathfrak{g} = \varkappa$, so wird auch $\mathfrak{h} = \varkappa$, und die transformirte Differentialgleichung lautet:

$$(\mathfrak{B}_6) \ldots\ldots \frac{d^4y}{dz^4} + \varkappa \frac{dy}{dz} - \frac{1}{100}\varkappa y = 0.$$

Die charakteristische Gleichung

$$r^4 + \varkappa r - \frac{1}{100}\varkappa = 0$$

besitzt gleiche Wurzeln, wenn

$$\varkappa = -\frac{4}{75^3}$$

ist. Auch dieser Fall wird mit dem allgemeinen zusammen erledigt werden.

2) $l \neq 0$, $m \neq 0$, $r = 0$, $s = 0$ *).

Da $k = 0$ ist, so muss

$$(1) \ldots. \frac{g^4}{h^3} = \varkappa^2$$

sein, wo wieder $\varkappa$ eine von 0 verschiedene Constante bedeutet; ferner muss, da z. B. $s = 0$ ist,

$$(2) \ldots\ldots \frac{l^2}{h} = \lambda^2$$

*) Unter der Voraussetzung $k = 0$ sind r und s gleichzeitig 0 oder von 0 verschieden.

sein, wo auch λ eine von 0 verschiedene Constante ist. Transformiren wir die Differentialgleichung (B) auf die unabhängige Veränderliche z gemäss der Gleichung $z = \varphi(t)$, in welcher $\varphi(t)$ bestimmt wird durch die Gleichung

$$g = \mathfrak{g}\,\varphi'^{3},$$

wo $\mathfrak{g}$ eine beliebig, aber von 0 verschieden gewählte Constante ist, so folgt zunächst aus (1):

$$\mathfrak{h} = \sqrt[3]{\mathfrak{g}^{4}\,\varkappa^{-2}}.$$

Ferner folgt aus (2):

$$\mathfrak{l} = \lambda\,.\,\sqrt{\mathfrak{h}},$$

also aus § 1, (14):

$$\mathfrak{a} = \frac{1}{32}\,\mathfrak{l} = \frac{1}{32}\,\lambda\,.\,\sqrt{\mathfrak{h}},$$

und dann aus § 1, (8):

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{g};$$

endlich aus § 1, (10):

$$\mathfrak{c} = \frac{9\,\mathfrak{a}^2 - \mathfrak{h}}{100}.$$

Wählt man der Einfachheit wegen

$$\mathfrak{g} = \varkappa^2,$$

so wird

$$\mathfrak{h} = \varkappa^2$$

$$\mathfrak{l} = \lambda\,\varkappa,$$

und die transformirte Differentialgleichung lautet:

$$(\mathfrak{B}_7) \ldots\ldots \frac{d^4 y}{dz^4} + \frac{1}{32}\,\lambda\,\varkappa\,\frac{d^2 y}{dz^2} + \varkappa^2\,\frac{dy}{dz} + \frac{9\lambda^2 - 32^2}{32^2\,.\,100}\,\varkappa^2\,y = 0.$$

Wir sehen, dass wir in allen in diesem Paragraphen behandelten Ausnahmefällen stets auf Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten geführt worden sind, und wollen nun im Folgenden die allgemeine charakteristische Gleichung

$$(3) \ldots . r^4 + \mathfrak{a} r^2 + \mathfrak{b} r + \mathfrak{c} = 0$$

betrachten und untersuchen, welche Relationen zwischen den Integralen der zugehörigen Differentialgleichung ($\mathfrak{B}$) möglich sind. Zunächst erledigen wir die Fälle gleicher Wurzeln:

1) Es seien zwei Wurzeln einander gleich: $r_4 = r_3$; dann lauten die Integrale der Differentialgleichung ($\mathfrak{B}$):

$$y_1 = e^{r_1 z}, \ y_2 = e^{r_2 z}, \ y_3 = e^{r_3 z}, \ y_4 = z e^{r_3 z}.$$

Zwischen diesen bestehe eine Relation

$$\Omega = \Sigma C_{i_{k_{l_m}}} y_1^{\,i} y_2^{\,k} y_3^{\,l} y_4^{\,m} = 0. \quad (i+k+l+m=n)$$

Man sieht zunächst*), dass die Aggregate aller derjenigen Glieder von Ω, welche sich zu demselben Gliede $c z^s e^{az}$ vereinigen, einzeln verschwinden müssen**). Da sich ferner zu einem bestimmten Gliede $c z^s e^{az}$ nur solche Glieder von Ω vereinigen, in denen y_4 denselben Exponenten $m = s$ hat, so kann man in den einzelnen Aggregaten y_4^s herausziehen und erhält so Relationen zwischen den drei Integralen y_1, y_2, y_3 allein, welche sich aber auf eine reduziren müssen, da sich sonst die Quotienten $\frac{y_2}{y_1}$ und $\frac{y_3}{y_1}$ als constant ergeben würden. Es ist also nur eine Relation zwischen y_1, y_2, y_3 möglich; soll diese wirklich existiren, so müssen***) die Gleichungen bestehen:

$$r_1 + r_2 + 2 r_3 = 0$$
$$d_1 r_1 + d_2 r_2 + d_3 r_3 = 0$$
$$d_1 + d_2 + d_3 = 0.$$

*) cfr. Lipm. Schlesinger, Diss., p. 77.

**) cfr. pag. 20, 21.

***) cfr. pag. 16.

Aus den beiden ersten Gleichungen, die der dritten wegen von einander unabhängig sind, ergeben sich die Verhältnisse der r_i $(i = 1, 2, 3)$ als rationale Zahlen. Dies ist die nothwendige, aber auch die hinreichende Bedingung für das Bestehen der einen Relation, welche, wenn man

$$\frac{r_1 - r_2}{r_2 - r_3} = \frac{\mu}{\nu} \quad (r_1 > r_2 > r_3)$$

setzt, wo μ und ν ganze positive relativ prime Zahlen bedeuten, folgendermassen lautet:

$$y_2^{\mu+\nu} = y_1^{\nu}\, y_3^{\mu} \text{ *)}.$$

2) Die charakteristische Gleichung (3) besitze zwei Paare gleicher Wurzeln; dann lauten die Integrale

$$y_1 = e^{r_1 z},\ y_2 = e^{r_2 z},\ y_3 = z e^{r_1 z},\ y_4 = z e^{r_2 z}.$$

Zwischen diesen besteht die Relation

$$(4) \ldots\ldots y_1 y_4 - y_2 y_3 = 0.$$

Dass in diesem Falle keine zweite Relation besteht, wird ganz ebenso bewiesen wie auf Seite 20.

Aus

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$$

folgt hier

$$r_2 = -r_1,$$

da $r_3 = r_1$ und $r_4 = r_2$ ist; der auf Seite 20 behandelte ist daher der einzige hierher gehörige Fall.

3) Die Gleichung (3) besitze eine dreifache Wurzel r_2; dann lauten die Integrale

$$y_1 = e^{r_1 z},\ y_2 = e^{r_2 z},\ y_3 = z e^{r_2 z},\ y_4 = z^2 e^{r_2 z}.$$

Zwischen y_2, y_3 und y_4 besteht die Relation

$$(5) \ldots\ldots y_3^2 - y_2 y_4 = 0,$$

und zwar existirt in diesem Falle zwischen den Integralen

*) cfr. Lipm. Schlesinger, Diss., p. 78 u. 79.

der Differentialgleichung (B) keine zweite Relation. Denn bestände eine solche nicht zerfallende Relation*)

$$L = \Sigma c_{i_{k_{lm}}} y_1^{\,i}\, y_2^{\,k}\, y_3^{\,l}\, y_4^{\,m} = 0, \quad (i+k+l+m=n)$$

so müssen sich, wenn man für y_1, y_2, y_3, y_4 ihre Werthe einsetzt, sämtliche Glieder von L zu einem Gliede $z^{s}\, e^{az}$ vereinigen, dessen Coefficient dann 0 wird. Die Exponenten von y_3 und y_4 genügen daher der Gleichung

$$l + 2m = s,$$

und da

$$i + k + l + m = n$$

ist, so ergiebt sich

$$i + k = n - s + m.$$

Das allgemeine Glied von L lautet also

$$y_1^{\,i} \cdot y_2^{\,n-s+m-i} \cdot y_3^{\,s-2m} \cdot y_4^{\,m}.$$

Wird die ganze Relation durch $y_1^{\,n-s} \cdot y_4^{\,s}$ (n und s sind ja feste Zahlen) dividirt, so erhält man

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{n-s-i} \cdot y_2^{\,m} \cdot \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^{s-m} \cdot y_3^{\,-m}$$

oder

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^{n-s-i} \cdot \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^{s-m} \cdot \left(\frac{y_2}{y_3}\right)^{m}.$$

Setzt man

$$\frac{y_2}{y_1} = u, \quad \frac{y_3}{y_4} = v, \quad \frac{y_2}{y_3} = w,$$

so lautet die Relation

$$L = \Sigma c_{i_{k_{lm}}} u^{n-s-i} \cdot v^{s-m} \cdot w^{m} = 0.$$

Nun ist aber in Folge der Relation (5)

*) cfr. pag. 20, Anmerknug.

$$v = w,$$

also

$$v^{s-m} \cdot w^{m} = v^{s}.$$

Es würde sich daher ergeben

$$v^{s} \cdot \Sigma C_{i_k l_m} u^{n-s-i} = 0,$$

d. h. u würde eine Constante sein; es ist also keine zweite Relation möglich. Der hier behandelte Fall kann nur für die Differentialgleichung ($\mathfrak{B}_7$) pag. 26 eintreten.

4) Da wegen der fehlenden dritten Potenz von r in Gleichung (3) alle vier Wurzeln nur dann einander gleich sein können, wenn sie 0 sind, die zugehörige Differentialgleichung ($\mathfrak{B}$) also lautet

$$\frac{d^4 y}{dz^4} = 0,$$

so kämen wir auf den Fall zweier parabolischer Relationen zurück. Wir gehen daher jetzt zu dem Fall über, in welchem alle vier Wurzeln von einander verschieden sind, und nehmen zunächst an, dass die Verhältnisse der r_i rational sind, oder, was dasselbe besagt, dass ausser der Gleichung

$$(6) \ldots . r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$$

noch zwei unabhängige lineare homogene Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten zwischen den r_i bestehen. Wir können dann setzen

$$r_1 = \gamma \varrho_1, \ r_2 = \gamma \varrho_2, \ r_3 = \gamma \varrho_3, \ r_4 = \gamma \varrho_4,$$

wo die ϱ_i ganze Zahlen ohne einen allen gemeinsamen Theiler bedeuten. Die Integrale y_i lassen sich dann als rationale Funktionen des Parameters

$$s = e^{\gamma z}$$

darstellen*):

$$y_1 = \zeta^{\varrho_1},\ y_2 = \zeta^{\varrho_2},\ y_3 = \zeta^{\varrho_3},\ y_4 = \zeta^{\varrho_4}.$$

Denkt man sich ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3, ϱ_4 so geordnet, dass

$$\varrho_1 > \varrho_2 > \varrho_3 > \varrho_4$$

ist, und setzt man

$$\frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_3} = \frac{\mu_1}{\nu_1},\ \frac{\varrho_1 - \varrho_2}{\varrho_2 - \varrho_4} = \frac{\mu_2}{\nu_2},$$

wo μ_1, ν_1 einerseits und μ_2, ν_2 andererseits ganze positive relativ prime Zahlen bedeuten, so bestehen zwischen den Integralen der Differentialgleichung (B) die beiden unabhängigen Relationen

$$(7) \ldots \begin{cases} y_2^{\mu_1 + \nu_1} = y_1^{\nu_1} \cdot y_3^{\mu_1} \\ y_2^{\mu_2 + \nu_2} = y_1^{\nu_2} \cdot y_4^{\mu_2}. \end{cases}$$

Durch die ϱ_i sind die μ_i, ν_i bestimmt und umgekehrt durch die μ_i, ν_i die Verhältnisse der ϱ_i, da noch in Folge von Gleichung (6)

$$\varrho_1 + \varrho_2 + \varrho_3 + \varrho_4 = 0$$

ist.

Man kann nun auch umgekehrt zeigen, dass, wenn zwischen den y_i zwei von einander unabhängige Relationen bestehen, dieselben auf zweigliedrige reduzirt werden können und die Verhältnisse der r_i rational sein müssen, dass also für die Existenz zweier unabhängiger homogener Relationen zwischen den y_i die Rationalität der Verhältnisse der r_i nicht nur die hinreichende, sondern auch die nothwendige Bedingung ist.

Es mögen zwischen den y_i die beiden homogenen Relationen bestehen

*) cfr. pag. 19.

$$(8)\ \ldots\ldots \begin{cases} L = \Sigma C_{i k l_m}\, y_1^{\,i}\, y_2^{\,k}\, y_3^{\,l}\, y_4^{\,m} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (i+k+l+m=n) \\ M = \Sigma C'_{i'' k' l' m'}\, y_1^{\,i''}\, y_2^{\,k'}\, y_3^{\,l'}\, y_4^{\,m'} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (i'+k'+l'+m'=n') \end{cases}$$

von denen die erste p, die zweite q Glieder enthalte. Aus (8) ergeben sich die Gleichungen *):

$$(9)\ \ldots\ldots \begin{cases} d_{1_r} r_1 + d_{2_r} r_2 + d_{3_r} r_3 + d_{4_r} r_4 = 0 \ (r=2,3\ldots p) \\ d'_{1_s} r_1 + d'_{2_s} r_2 + d'_{3_s} r_3 + d'_{4_s} r_4 = 0 \ (s=2,3\ldots q) \end{cases}$$

wo $d_{1_r} = i_r - i_1$, $d_{2_r} = k_r - k_1$ u. s. w. ist.

Dazu kommt noch Gleichung (6) und die Gleichungen:

$$(10)\ \ldots\ldots \begin{cases} d_{1_r} + d_{2_r} + d_{3_r} + d_{4_r} = 0 \ (r=2,\ldots p) \\ d'_{1_s} + d'_{2_s} + d'_{3_s} + d'_{4_s} = 0 \ (s=2,\ldots q). \end{cases}$$

Es leuchtet zunächst ein, dass von den beiden Gleichungssystemen (9) wegen (6) nur zwei Gleichungen wirklich unabhängig sein können, dass also die Gleichungen (9), da sie wegen (10) von der Gleichung (6) unabhängig sind, sich aus zwei derselben linear ableiten lassen müssen. Zwei der Gleichungen (9) aber müssen von einander unabhängig sein; denn sonst wäre

$$\begin{aligned} d_{i_r} &= \alpha_r\, d_{i_2} \\ d'_{i_s} &= \alpha'_s\, d_{i_2} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i=1,\ 2,\ 3,\ 4 \\ r=3,\ \ldots. p \\ s=2,\ \ldots. q \end{pmatrix}$$

Die beiden Relationen (8) lauten dann, wenn man die erste durch $y_1^{\,i_1}\, y_2^{\,k_1}\, y_3^{\,l_1}\, y_4^{\,m_1}$, die zweite durch $y_1^{\,i'_1}\, y_2^{\,k'_1}\, y_3^{\,l'_1}\, y_4^{\,m'_1}$ dividirt und $y_1^{\,d_{1_2}}\, y_2^{\,d_{2_2}} y_3^{\,d_{3_2}}\, y_4^{\,d_{4_2}}$ mit u bezeichnet:

*) cfr. pag. 15 u. f.

$$(8) \ldots \begin{cases} L = \Sigma c_{i_k l_m} u^{\alpha_r} = 0 \\ \overline{M} = \Sigma c'_{i'_{k'} l'_{m'}} u^{\alpha'_s} = 0. \end{cases}$$

Es würden sich also, da u andererseits wegen (9) den Werth 1 hat, die beiden Gleichungen (8) auf eine zweigliedrige, nämlich

$$u - 1 = 0$$

oder

$$y_1^{i_2} y_2^{k_2} y_3^{l_2} y_4^{m_2} = y_1^{i_1} y_2^{k_1} y_3^{l_1} y_4^{m_1}$$

reduziren, was gegen die Voraussetzung ist. Es mögen nun also zwei unabhängige Gleichungen des Systems (9) lauten

$$(11) \ldots \begin{cases} d_{1_\lambda} r_1 + d_{2_\lambda} r_2 + d_{3_\lambda} r_3 + d_{4_\lambda} r_4 = 0 \\ d_{1_\mu} r_1 + d_{2_\mu} r_2 + d_{3_\mu} r_3 + d_{4_\mu} r_4 = 0, \end{cases}$$

so lassen sich alle d in folgender Weise durch d_{i_λ} und d_{i_μ} darstellen:

$$\begin{aligned} d_{i_r} &= \alpha_r d_{i_\lambda} + \beta_r d_{i_\mu} \\ d'_{i_s} &= \alpha'_s d_{i_\lambda} + \beta'_s d_{i_\mu} \end{aligned} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ r = 2, \ldots p \\ s = 2, \ldots q \end{pmatrix}$$

Dividirt man daher die beiden Relationen (8) wieder durch $y_1^{i_1} y_2^{k_1} y_3^{l_1} y_4^{m_1}$ resp. durch $y_1^{i'_1} y_2^{k'_1} y_3^{l'_1} y_4^{m'_1}$ so werden dieselben

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \Sigma c_r u^{\alpha_r} v^{\beta_r} = 0 \\ \overline{M} &= \Sigma c'_s u^{\alpha'_s} v^{\beta'_s} = 0, \end{aligned}$$

wenn man $y_1^{d_{1\lambda}} y_2^{d_{2\lambda}} y_3^{d_{3\lambda}} y_4^{d_{4\lambda}}$ mit u und $y_1^{d_{1\mu}} y_2^{d_{2\mu}} y_3^{d_{3\mu}} y_4^{d_{4\mu}}$ mit v bezeichnet.

Die beiden Relationen reduziren sich also auf

$$y_1^{d_{1\lambda}} y_2^{d_{2\lambda}} y_3^{d_{3\lambda}} y_4^{d_{4\lambda}} = 1$$
$$y_1^{d_{1\mu}} y_2^{d_{2\mu}} y_3^{d_{3\mu}} y_4^{d_{4\mu}} = 1,$$

d. h. auf die zweigliedrigen Relationen

$$y_1^{i_\lambda} y_2^{k_\lambda} y_3^{l_\lambda} y_4^{m_\lambda} = y_1^{i_1} y_2^{k_1} y_3^{l_1} y_4^{m_1} \text{ und}$$

$$\begin{cases} y_1^{i_\mu} y_2^{k_\mu} y_3^{l_\mu} y_4^{m_\mu} = y_1^{i_1} y_2^{k_1} y_3^{l_1} y_4^{m_1} \\ y_1^{i'_\mu} y_2^{k'_\mu} y_3^{l'_\mu} y_4^{m'_\mu} = y_1^{i'_1} y_2^{k'_1} y_3^{l'_1} y_4^{m'_1}, \end{cases} \text{ resp.}$$

jenachdem die d_{i_μ} dem ersten oder zweiten der Systeme (9) angehören. Aus den Gleichungen (11) in Verbindung mit der Gleichung (6) folgt, dass die Verhältnisse der r_i rational sein müssen.

Wir kommen nunmehr zu dem Fall, wo zwar die Verhältnisse der r_i nicht rational sind, wo aber ausser der Gleichung (6) noch eine davon unabhängige lineare homogene Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten zwischen den r_i besteht. Aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\lambda_1 r_2 = \mu_1 r_1 + \nu_1 r_4$$
$$\lambda_2 r_3 = \mu_2 r_1 + \nu_2 r_4,$$

also

$$y_2^{\lambda_1} = y_1^{\mu_1} y_4^{\nu_1}$$
$$y_3^{\lambda_2} = y_1^{\mu_2} y_4^{\nu_2},$$

oder

$$\left(\frac{y_2}{y_4}\right)^{\lambda_1} = \left(\frac{y_1}{y_4}\right)^{\mu_1} \cdot y_4^{\nu_1 + \mu_1 - \lambda_1}$$

$$\left(\frac{y_3}{y_4}\right)^{\lambda_2} = \left(\frac{y_1}{y_4}\right)^{\mu_2} y_4^{\nu_2 + \mu_2 - \lambda_2}.$$

Wenn man das kleinste gemeinschaftliche Vielfache der absoluten Werthe von $\nu_1 + \mu_1 - \lambda_1$ und $\nu_2 + \mu_2 - \lambda_2$ mit m, ferner $\frac{m}{\nu_1 + \mu_1 - \lambda_1}$ mit α und $\frac{m}{\nu_2 + \mu_2 - \lambda_2}$ mit β bezeichnet, die erste Gleichung zur α^{ten}, die zweite zur β^{ten} Potenz erhebt und dann beide durcheinander dividirt, so erhält man

$$\left(\frac{y_2}{y_4}\right)^{\lambda_1 \alpha} = \left(\frac{y_3}{y_4}\right)^{\lambda_2 \beta} \cdot \left(\frac{y_1}{y_4}\right)^{\mu_1 \alpha - \mu_2 \beta}$$

oder

$$y_2^{\lambda_1 \alpha} \cdot y_4^{\mu_1 \alpha - \mu_2 \beta + \lambda_2 \beta - \lambda_1 \alpha} = y_3^{\lambda_2 \beta} \cdot y_1^{\mu_1 \alpha - \mu_2 \beta}$$

oder, wenn zur Abkürzung

$$\lambda_1 \alpha = \lambda, \ \lambda_2 \beta = \mu, \ \mu_1 \alpha - \mu_2 \beta = \nu$$

gesetzt wird:

$$y_2^{\lambda} \, y_4^{\mu + \nu - \lambda} = y_3^{\mu} \, y_1^{\nu}.$$

Die Zahlen λ, μ und ν können auch negativ sein; man erhält daher in diesem Falle eine homogene Relation entweder von der Form

$$y_1^{\alpha_1} \, y_2^{\alpha_2} = y_3^{\alpha_3} \, y_4^{\alpha_4}$$

oder von der Form

$$y_1^{\alpha_1} = y_2^{\alpha_2} \, y_3^{\alpha_3} \, y_4^{\alpha_4},$$

wo nunmehr α_1, α_2, α_3, α_4 positive Zahlen sind. Hierher gehört u. a. auch der auf Seite 22 behandelte Fall der Differentialgleichung ($\mathfrak{B}_4$).

Auch hier lässt sich umgekehrt zeigen, dass, wenn

zwischen den y_i nur eine homogene Relation besteht, dieselbe sich auf eine zweigliedrige reduziren lässt und zwischen den r_i ausser der Gleichung (6) noch eine und nur eine lineare homogene Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten bestehen muss. Die Relation laute nämlich

$$L = \Sigma c_{i_{k_{l_m}}} y_1^{\,i} y_2^{\,k} y_3^{\,l} y_4^{\,m} = 0 \quad (i+k+l+m=n)$$

und die linke Seite derselben möge p Glieder enthalten, so ergeben sich wieder *) $p-1$ Gleichungen

$$d_{1_s} r_1 + d_{2_s} r_2 + d_{3_s} r_3 + d_{4_s} r_4 = 0 \quad (s = 2, 3 \ldots p).$$

Alle diese Gleichungen müssen aber aus einer derselben hervorgehen, da sich sonst die Verhältnisse der r_i als rationale Zahlen und hieraus nach Früherem zwei homogene Relationen ergeben würden, was gegen die Voraussetzung ist. Es muss also sein

$$d_{i_s} = \alpha_s d_{i_2} \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, 4 \\ s = 3, \ldots p \end{pmatrix}.$$

Die Relation

$$L = 0$$

lautet dann nach Division durch $y_1^{\,i_1} y_2^{\,k_1} y_3^{\,l_1} y_4^{\,m_1}$, wenn man $y_1^{\,d_{1_2}} y_2^{\,d_{2_2}} y_3^{\,d_{3_2}} y_4^{\,d_{4_2}}$ mit u bezeichnet:

$$\Sigma c_s u^{\alpha_s} = 0.$$

Sie reduzirt sich daher, da andererseits $u = 1$ ist, auf

$$y_1^{\,i_2} y_2^{\,k_2} y_3^{\,l_2} y_4^{\,m_2} = y_1^{\,i_1} y_2^{\,k_1} y_3^{\,l_1} y_4^{\,m_1},$$

und es bestehen zwischen den r_i nur die beiden unabhängigen Gleichungen

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$$
$$d_{1_2} r_1 + d_{2_2} r_2 + d_{3_2} r_3 + d_{4_2} r_4 = 0.$$

Besteht endlich zwischen den r_i nur die Gleichung

*) cfr. pag 32.

(6), so existirt, wie aus dem Vorhergehenden folgt, zwischen den y_i keine homogene Relation, und umgekehrt.

§ 4.

Um zu entscheiden, wann auch noch in den in § 3 behandelten Ausnahmefällen die Integrale algebraisch sind, machen wir nunmehr die Voraussetzung, dass die vorgelegte Differentialgleichung (A) zur Fuchs'schen Klasse gehört und dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Zahlen sind. Wir haben in § 3 gezeigt, dass in diesen Ausnahmefällen die Differentialgleichuug (A) stets durch eine Substitution der Form

$$z = \varphi(t)$$
$$y = u \cdot \varrho(t)$$

auf eine Differentialgleichung $(\mathfrak{B})$ mit konstanten Coefficienten zurückgeführt werden kann, in der das Glied mit der dritten Ableitung fehlt. Die über die Differentialgleichung (A) gemachten Voraussetzungen gestatten nun die Bestimmung des analytischen Charakters der Transformationsfunktion $\varphi(t)$ und damit der Integrale der Differentialgleichung (A). Wenn die Integrale algebraisch sind, so müssen zwischen denselben zwei homogene Relationen bestehen; wir sondern daher aus den in § 3 behandelten Fällen zunächst diejenigen aus, welche zwei Relationen zulassen. Dieses sind die Fälle I; II, 2; III, 2; IV, 1 und 2.

Wir beginnen mit dem Fall III, 2 (Seite 23 u. f.), d. i. $g \neq 0$, $m \neq 0$, $h = 0$, $r = 0$, und setzen die Constante

$$\frac{g^2}{m^3} = \varkappa$$

derart voraus, dass die Wurzeln der zur Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_5)$ (Seite 24) gehörigen charakteristischen Gleichung alle von einander verschieden und ihre Verhältnisse rational sind; denn nur in diesem Falle existirten zwei Relationen. Da die vorgelegte Differentialgleichung (A), also auch die des zweiten Gliedes beraubte Differentialgleichung (B) zur Fuchs'schen Klasse gehört, so sind g und m rationale Funktionen von t; dagegen sind $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{m}$ Konstanten. Daher folgt zunächst aus

$$g = \mathfrak{g} \cdot \varphi'^3$$
$$m = \mathfrak{m} \cdot \varphi'^2,$$

dass

$$\varphi' = \frac{g \cdot \mathfrak{m}}{m \cdot \mathfrak{g}}$$

eine rationale Funktion von t ist. Folglich gehört auch diejenige Differentialgleichung, welche aus der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_5)$ durch die Transformation $z = \varphi(t)$ hervorgeht, zur Fuchs'schen Klasse, denn ihre Integrale unterscheiden sich von denen der Differentialgleichung (B) nur durch den Faktor $\varphi'^{\frac{3}{2}}$. Es ergiebt sich daher aus den Gleichungen (4) des § 1, wenn man dort $p_1 = 0$ und für p_2, p_3, p_4 die von Null verschiedenen Constanten $\mathfrak{a} = \frac{1}{18}\varkappa$, $\mathfrak{b} = \varkappa^2$, $\mathfrak{c} = \frac{1}{3600}\varkappa^2$ einsetzt, dass φ', welches wir bereits als rationale Funktion erkannt haben, die Form haben muss

$$\varphi' = \sum_{i=1}^{i=\varrho} \frac{\alpha_i}{t - t_i},$$

sodass φ der Logarithmus eines Ausdruckes

$$M = (t - t_1)^{\alpha 1} (t - t_2)^{\alpha 2} \ldots\ldots (t - t_\varrho)^{\alpha \varrho}$$

ist. Die Integrale der Differentialgleichung (B) lauten daher in diesem Falle

$$v_i = \left[\frac{d \log M}{dt}\right]^{\frac{3}{2}} \cdot M^{r_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

und die Integrale der Differentialgleichung (A):

$$y_i = e^{\frac{1}{4}\int p_1 dt} \cdot \left[\frac{d \log M}{dt}\right]^{\frac{3}{2}} \cdot M^{r_i} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Aus den über die Differentialgleichung (A) gemachten Voraussetzungen folgt zunächst, dass $e^{\frac{1}{4}\int p_1 dt}$ die Wurzel aus einer rationalen Funktion ist; $\left[\frac{d \log M}{dt}\right]^{\frac{3}{2}}$ ist von selber Wurzel einer rationalen Funktion; also muss auch nach denselben Voraussetzungen M^{r_i} Wurzel aus einer rationalen Funktion sein. Daraus ergiebt sich noch, dass die Verhältnisse der r_i rational sein müssen, was den bereits über $\varkappa$ gemachten Annahmen entspricht.

Die Fälle IV, 1 und 2 lassen sich ganz in derselben Weise erledigen, da hier $g \neq 0$ und $h \neq 0$ ist und sich daher aus

$$g = \mathfrak{g}\, \varphi'^3$$
$$h = \mathfrak{h}\, \varphi'^4$$

φ' wieder als rationale Funktion von t ergiebt. In den Fällen III, 2; IV, 1 und 2 sind also die Integrale der Differentialgleichung (A) algebraisch, wenn dieselbe zur Fuchs'schen Klasse gehört und die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen von einander verschiedene rationale Zahlen sind. Die Existenz von Re-

lationen braucht in diesen Fällen nicht vorausgesetzt zu werden.

Die Fälle II, 1 und III, 1 vertragen sich nicht mit der Voraussetzung, dass zwei Relationen existiren, also die Verhältnisse der r_i rational sein sollen, da hier die r_i vierte resp. dritte Einheitswurzeln sind; die zugehörigen Differentialgleichungen sind daher nicht algebraisch integrirbar *): in der That haben wir auch gezeigt, dass in diesen Fällen nur eine Relation besteht.

Eine besondere Behandlung erfordert der Fall II, 2: $g = 0$, $h \neq 0$, $l \neq 0$, $s = 0$ (Seite 17).

Denn hier folgt aus

$$h = \mathfrak{h} \cdot \varphi'^4$$
$$l = \mathfrak{l} \cdot \varphi'^2$$

nur, dass φ'^2 eine rationale Funktion ist; aus den Gleichungen (4) des § 1 ergiebt sich dann, wenn man dort $p_1 = 0$, $p_2 = \varkappa$, $p_3 = 0$, $p_4 = \frac{1}{100}(9\varkappa^2 - 32^2\varkappa)$ setzt, dass φ'^2 die Form

$$R = \frac{G}{G^{\frac{2}{\varrho}}}^{-\frac{2}{\varrho}}$$

annimmt, wo die G ganze rationale Funktionen von dem

*) Die Integrale lauten im Falle II, 1:

$$y_i = e^{\frac{1}{4}\int p_1\,dt} \cdot R(t)^{\frac{3}{8}} \cdot e^{r_i \int \sqrt[4]{R(t)}\,dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4;\ r_i^4 = 1)$$

und im Falle III, 1:

$$y_1 = e^{\frac{1}{4}\int p_1\,dt} \cdot R(t)^{\frac{1}{2}}$$

$$y_i = e^{\frac{1}{4}\int p_1\,dt} \cdot R(t)^{\frac{1}{2}} \cdot e^{r_i \int \sqrt[3]{R(t)}\,dt} \qquad (i = 2, 3, 4;\ r_i^3 = 1)$$

durch den Index bezeichneten Grade bedeuten. Daraus ergiebt sich

$$\varphi = \int \sqrt{R(t)}\, dt,$$

und die Integrale der Differentialgleichung (A) lauten in diesem Falle:

$$y_i = e^{\frac{1}{4}\int p_1\, dt} \cdot R(t)^{\frac{3}{4}} \cdot e^{r_i \int \sqrt{R(t)}\, dt} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Dieselben sind nur dann algebraisch, wenn $r_i \int \sqrt{R(t)}\, dt$ gleich dem Logarithmus einer algebraischen Funktion ist.

In dem Falle II, 2 existirten, wenn $\varkappa$ von -64 und $\frac{32^2}{9}$ verschieden war und die auf Seite 19, Anm. angegebene Form hatte, zwischen den Integralen der Differentialgleichung (A) die beiden Relationen

$$\begin{cases} y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0 \\ y_1^{\nu} y_4^{\mu} - y_2^{\nu} y_3^{\mu} = 0. \end{cases}$$

Umgekehrt folgt aus der Existenz dieser beiden Relationen nach § 2, dass sich die Differentialgleichung (A) durch eine Substitution

$$z = \varphi(t)$$
$$y = u \cdot \varrho(t)$$

aus der Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_3)$ ableiten lässt, da zwischen den Integralen der letzteren bei den $\varkappa$ auferlegten Beschränkungen obige Relationen bestehen. Für die Differentialgleichung $(\mathfrak{B}_3)$ ist aber $g = 0$, $h \neq 0$, $l \neq 0$, $s = 0$; dies ist daher auch für die Differentialgleichung (A) der Fall.

Wenn also zwischen den Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung vierter Ordnung zwei Relationen von der Form

$$\begin{cases} y_1\, y_2 - y_3\, y_4 = 0 \\ y_1^{\nu}\, y_4^{\mu} - y_2^{\nu}\, y_3^{\mu} = 0 \end{cases}$$

bestehen, so reichen die Voraussetzungen, dass dieselbe zur Fuchs'schen Klasse gehört und die determinirenden Fundamentalgleichungen nur ungleiche rationale Wurzeln besitzen, nicht zu dem Schlusse aus, dass ihre Integrale algebraisch sind: in der That giebt es in diesem Falle Differentialgleichungen mit nicht algebraischen Integralen.

Betrachten wir z. B. den Fall, dass

$$R(t) = \frac{1}{(1-t^2)(1-k^2 t^2)},$$

also $\varphi(t)$ ein elliptisches Integral erster Gattung ist, und dass die Integrale lauten:

$$y_1 = e^{r_1 \int \sqrt{R(t)}\, dt}, \quad y_2 = e^{-r_1 \int \sqrt{R(t)}\, dt},$$
$$y_3 = e^{r_2 \int \sqrt{R(t)}\, dt}, \quad y_4 = e^{-r_2 \int \sqrt{R(t)}\, dt}.$$

Die Differentialgleichung, welcher diese Integrale genügen, gehört zur Fuchs'schen Klasse, und ihre determinirenden Fundamentalgleichungen besitzen nur rationale von einander verschiedene Wurzeln: das Erstere ist schon daraus ersichtlich, dass ein elliptisches Integral erster Gattung für keinen Werth der unabhängigen Veränderlichen unendlich wird; man kann es aber auch direkt aus der Form der Differentialgleichung erkennen, welche folgendermassen lautet:

$$D = y^{(IV)} - 3\,\frac{R'}{R}\,y''' + \left[\frac{19}{4}\left(\frac{R'}{R}\right)^2 - 2\,\frac{R''}{R} + \varkappa R\right] y''$$
$$+ \left[-\frac{7}{2}\left(\frac{R'}{R}\right)^3 + \frac{13}{4}\,\frac{R'R''}{R^2} - \frac{1}{2}\,\frac{R'''}{R} - \frac{\varkappa}{2}\,R'\right] y'$$
$$+ \frac{1}{100}\,(9\varkappa^2 - 32^2\varkappa)\,R^2 y = 0.$$

Die Integrale

$$y_1 = e^{r_1 \int \sqrt{R(t)}\, dt} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{-r_1 \int \sqrt{R(t)}\, dt}$$

genügen für sich der Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$D_1 = y'' - \frac{1}{2}\frac{R'}{R} y' - r_1^2 R y = 0,$$

und ebenso die Integrale

$$y_3 = e^{r_2 \int \sqrt{R(t)}\, dt} \quad \text{und} \quad y_4 = e^{-r_2 \int \sqrt{R(t)}\, dt}$$

der Differentialgleichung

$$D_2 = y'' - \frac{1}{2}\frac{R'}{R} y' - r_2^2 R y = 0.$$

Da einerseits

$$R = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1} + \frac{\gamma}{t-\frac{1}{k}} + \frac{\delta}{t+\frac{1}{k}}$$

ist, wo α, β, γ und δ Constanten bedeuten, andererseits aus

$$R = \frac{1}{(1-t)(1+t)(1-kt)(1+kt)}$$

folgt:

$$\frac{R'}{R} = -\left[\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1} + \frac{1}{t-\frac{1}{k}} + \frac{1}{t+\frac{1}{k}}\right],$$

so lautet in den beiden Differentialgleichungen D_1 und D_2 die determinirende Fundamentalgleichung für einen der singulären Punkte $+1$, -1, $+\frac{1}{k}$, $-\frac{1}{k}$:

$$r(r-1) + \frac{1}{2} r = 0$$

oder

$$r\left(r - \frac{1}{2}\right) = 0;$$

für den unendlich fernen Punkt lautet die determinirende Fundamentalgleichung

$$r(r-1) = 0,$$

derselbe ist also kein eigentlich singulärer Punkt. Die

zu den singulären Punkten gehörigen Exponenten sind daher 0 und $\frac{1}{2}$. Zu demselben Resultat gelangt man durch direkte Entwickelung der Integrale in Potenzreihen. Es ist nämlich z. B.

$$e^{r_1 \int \sqrt{R(t)}\, dt} = e^{\int (t-1)^{-\frac{1}{2}} \mathfrak{P}(t-1)\, dt} \qquad (t-1)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}_1(t-1)$$

also

$$y_1 = P_1(t-1) + (t-1)^{\frac{1}{2}} \cdot P_2(t-1)$$

und $y_2 = P_1(t-1) - (t-1)^{\frac{1}{2}} \cdot P_2(t-1)$,

wo die $\mathfrak{P}_i$ und P_i nach ganzen positiven Potenzen von $t-1$ fortschreitende Potenzreihen bedeuten.

Es wird daher $P_1(t-1)$ und $(t-1)^{\frac{1}{2}} \cdot P_2(t-1)$ ein zu dem singulären Punkt $t=1$ gehöriges Fundamentalsystem von Integralen sein. Analoges gilt für die übrigen singulären Punkte und für y_3 und y_4. Die determinirende Fundamentalgleichung der Differentialgleichung $D=0$ für einen der singulären Punkte $1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$:

$$r(r-1)\left(r^2 - 2r + \frac{3}{4}\right) = 0,$$

besitzt die Wurzeln $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$; die determinirende Fundamentalgleichung für den unendlich fernen Punkt lautet

$$r(r-1)(r-2)(r-3) = 0;$$

derselbe ist also kein eigentlich singulärer Punkt.

Die Differentialgleichung $D=0$ gehört demnach zur Fuchs'schen Klasse, und die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen sind von einander verschiedene rationale Zahlen. Ferner bestehen, wenn das Verhältnis

$\frac{r_1}{r_2}$ gleich einer rationalen Zahl $\frac{\mu}{\nu}$ ist, zwischen ihren Fundamentalintegralen y_1, y_2, y_3, y_4 die beiden Relationen

$$\begin{cases} y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0 \\ y_1^{\nu} y_4^{\mu} - y_2^{\nu} y_3^{\mu} = 0 \text{ *}). \end{cases}$$

Und doch sind diese Integrale offenbar nicht algebraisch.

Ist das Verhältnis $\frac{r_1}{r_2}$ irrational, so existirt zwischeu den Integralen der Differentialgleichung $D = 0$ nur eine homogene Relation; es ergiebt sich daher in diesem Falle, ebenso wie in denjenigen Fällen von II, 1 und III, 1, wo $\sqrt[4]{R(t)}\,dt$ resp. $\sqrt[3]{R(t)}\,dt$ Abelsche Differentiale erster Gattung sind, die interessante Thatsache, dass zwischen den Fundamentalintegralen nur eine Relation, im Falle III, 1 sogar vom dritten Grade, existirt, trotzdem die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen rational sind. Damit ist gezeigt, dass die Existenz einer Relation höheren als zweiten Grades nicht nothwendig das Bestehen einer zweiten Relation nach sich zieht.

Auch in dem Falle I: $g = 0$, $h = 0$ brauchen die Integrale der Differentialgleichung (A) nicht algebraisch zu sein, da sich aus der Bestimmungsgleichung für φ

$$(2) \ldots . \; 5\frac{\varphi'''}{\varphi'} - \frac{15}{2}\left(\frac{\varphi''}{\varphi'}\right)^2 = a$$

φ nicht nothwendig als algebraische Funktion ergiebt **).

Fassen wir die Resultate der vorliegenden Arbeit noch einmal zusammen, so können wir im Wesentlichen Folgendes aussagen:

*) cfr. pag. 18 u. 19.

**) cfr. Ludw. Schlesinger, Diss., p. 15.

Wenn zwischen den Fundamentalintegralen einer homogenen linearen Differentialgleichung 4^{ter} Ordnung mit algebraischen Coefficienten, von denen derjenige der dritten Ableitung die logarithmische Ableitung einer algebraischen Funktion ist, zwei homogene Relationen bestehen, so sind ihre Integrale im Allgemeinen algebraisch. Eine Ausnahme bildet der Fall zweier parabolischer Relationen und der Fall zweier Relationen von der Form

$$\begin{cases} y_1 y_2 - y_3 y_4 = 0 \\ y_1^{\nu} y_4^{\mu} - y_2^{\nu} y_3^{\mu} = 0. \end{cases}$$

Wenn gewisse aus den Coefficienten der Differentialgleichung gebildete Invarianten verschwinden, so muss allerdings noch die Bedingung hinzutreten, dass die Differentialgleichung der Fuchs'schen Klasse angehört und die Wurzeln ihrer determinirenden Fundamentalgleichungen rational sind. Dann folgt aber direkt, ohne Voraussetzung der Relationen, dass die Integrale algebraisch sind; sie sind sogar in diesen Fällen Wurzeln aus rationalen Funktionen, und die Existenz der zwischen ihnen bestehenden Relationen ist eine Folge der über die Differentialgleichung gemachten Voraussetzungen.

THESEN.

1) Die Einführung der Riemann'schen Fläche bietet für die Behandlung der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale wesentliche Vortheile dar.

2) Die Weierstrass'schen Funktionen $\wp$ und σ sind den Jakobi'schen *sinam* und ϑ als Grundelemente der Theorie der elliptischen Funktionen vorzuziehen.

3) Die Zeit ist nicht, wie Kant meint, eine blosse apriorische Anschauungsform und als solche rein subjectiv, sondern sie besitzt objective Realität.

Vita.

Natus sum Max Meyer Berolinensis die XXIII. mensis Novembris anni h. s. LXV patre Adolpho, quem praematura morte abreptum lugeo, matre Bertha e gente Reiss. Fidei addictus sum mosaicae. Primis litterarum elementis a caecorum magistro, nomine Krueger, imbutus Sophiae gymnasium reale frequentavi Berolinense, quod primum Bachio, deinde Marto viris doctissimis et humanissimis rectoribus tum florebat. Maturitatis testimonium adeptus autumno anni h. s. LXXXV inter cives academicos Almae Matris Fridericae Guilelmae Berolinensis receptus per quinque annos rebus mathematicis, physicis, philosophicis operam dedi. Viros audivi clarissimos du Bois-Reymond, Fuchs, Glan, de Helmholtz, Hensel, Hettner, Knoblauch, Kronecker (†), Netto, Paulsen, Planck, Pringsheim, Runge, Schmidt, Schwan, Spitta, Zeller. Omnibus his viris optime de me meritis, imprimis prof. ill. Fuchs, studiorum meorum fautori benevolentissimo, praeterea viro doctissimo Wallenberg, qui privata eruditione omnium rerum mathematicarum scientiam meam amplificavit, gratias maximas ago.